Rachunek Prawdopodobieństwa II
Kolokwium, 9 grudnia 2022 r.
Grupa A

A1. Dany jest ciąg $X_1, X_2, ...$ dodatnich, niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie oraz ciąg $a_1, a_2, ...$ dodatnich liczb rzeczywistych. Dowieść, że jeżeli ciąg

$$Y_n = \max\{a_1 X_1,\ a_2 X_2, ... a_n X_n\}$$

zbiega według rozkładu, to ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$ jest ograniczony.

A2. Dla $n = 1, 2, ...$ niech μ_n będzie miarą na $\mathbb{R}$ o funkcji charakterystycznej $\varphi_{\mu_n}(t) = \varphi_n(t) = \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{it}-1)\sqrt{n}}$. Czy rodzina miar $\{\mu_n : n = 1, 2, ..\}$ jest ciasna?

A3. Niech $(\xi_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych, jednakowo rozłożonych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem 2 oraz niech $\tau = \inf\{k \geq 1 : \xi_k < 3\}$. Proszę uzasadnić, że $\tau < \infty$ prawie na pewno, a następnie wyznaczyć funkcje charakterystyczne zmiennych losowych ξ_τ, $\xi_{\tau+1}$.

A4. Dla $n = 1, 2...$ zmienna losowa X_n ma rozkład: $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{(n+1)}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{(n+1)}$; zmienne X_n są niezależne. Przyjmujemy $S_n = X_1 + ... + X_n$. Proszę zbadać, czy ciąg zmiennych losowych

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\ln n}}$$

jest zbieżny według rozkładu, a w przypadku odpowiedzi twierdzącej - wyznaczyć rozkład graniczny.

Uwaga. Mogą się przydać wzory: $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma$ *(stała Eulera),* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

A5. Każdego dnia w drodze do pracy pan Kowalski udaje się na przystanek autobusowy w losowym momencie między godziną 8 a 9 i wsiada do pierwszego autobusu, który się pojawi. Z przystanku odchodzą trzy autobusy: A, B i C. Autobus A odjeżdża o 8:10 i 9:10; autobus B odjeżdża o 8:30, autobus C o 8:45.

Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że w ciągu kolejnych 92 dni, w drodze do pracy, pan Kowalski wsiądzie do autobusu A więcej razy, niż do autobusu B. Wynik wyrazić w zależności od dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.

Rachunek Prawdopodobieństwa II
Kolokwium, 9 grudnia 2022 r.
Grupa B

B1. Dany jest ciąg $\xi_1, \xi_2, \ldots$ dodatnich, niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie oraz ciąg $b_1, b_2, \ldots$ dodatnich liczb rzeczywistych. Dowieść, że jeżeli ciąg

$$Z_n = \max\{b_1\xi_1,\, b_2\xi_2, \ldots b_n\xi_n\}$$

zbiega według rozkładu, to ciąg $(b_n)_{n\geq 1}$ jest ograniczony.

B2. Dla $n = 1, 2, \ldots$ niech μ_n będzie miarą na $\mathbb{R}$ o funkcji charakterystycznej $\varphi_{\mu_n}(t) = \varphi_n(t) = \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{it}-1)\ln n}$. Czy rodzina rozkładów $\{\mu_n : n = 1, 2, ..\}$ jest ciasna?

B3. Niech $(\xi_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych, jednakowo rozłożonych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem 3 oraz niech $\tau = \inf\{k \geq 1 : \xi_k > 2\}$. Proszę uzasadnić, że $\tau < \infty$ prawie na pewno, a następnie wyznaczyć funkcje charakterystyczne zmiennych losowych ξ_τ, $\xi_{\tau+1}$.

B4. Dla $n = 1, 2 \ldots$ zmienna losowa X_n ma rozkład: $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{2n}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$; zmienne X_n są niezależne. Przyjmujemy $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Proszę zbadać, czy ciąg zmiennych losowych

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\ln n}}$$

jest zbieżny według rozkładu, a w przypadku odpowiedzi twierdzącej - wyznaczyć rozkład graniczny.

Uwaga. Mogą się przydać wzory: $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma$ *(stała Eulera),* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

B5. W pewnym doświadczeniu biologicznym, przeprowadzanym codziennie, mysz ma dostęp do karmnika w losowym momencie między 8:00 a 9:00 (o rozkładzie jednostajnym). Pokarm występuje w trzech wariantach: A, B, C. O godzinie 8:00 i 8:45 wykładana jest porcja pokarmu A, o godzinie 8:20 porcja pokarmu B, o godzinie 8:30 porcja pokarmu C (przed wyłożeniem nowego pokarmu stary jest zabierany, jeżeli nie został zjedzony). Mysz zjada to, co jest wyłożone w momencie jej przyjścia.

Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że na przestrzeni 12 tygodni mysz więcej razy zje karmę A niż karmę B? Wynik wyrazić w zależności od dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.